Д.К. Агишева, С.А. Зотова, В.Б. Светличная

МАТРИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Волгоград 2001

Тема 1. *Матрицы. Основные действия над ними. Обратная матрица. Матричный способ решения систем линейных уравнений*

§ 1. Матрицы. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов, или сокращенно А = (a_{ij}), i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n.

Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы. Первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Таким образом, элемент a_{21} стоит на пересечении 2-й строки и 1-го столбца.

Отметим частные случаи прямоугольных матриц.

Если m = 1, n – любое, мы имеем однострочную матрицу, которую называют *матрицей-строкой*.

Если n = 1, m – любое, мы имеем одностолбцовую матрицу, которую называют *матрицей-столбцом*.

Матрица, состоящая из одного числа (m = 1, n = 1), отождествляется с этим же числом.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей* и обозначается $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Элементы квадратной матрицы с одинаковыми индексами, т.е. a_{11}, a_{22},..., a_{nn} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{1n} , a_{2n-1},..., a_{n1} – *побочную*.

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *диагональной*.

Особую роль в матричном исчислении играет *единичная* матрица. Это квадратная матрица следующего вида:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы главной диагонали равны единице, а все остальные – нулевые.

Позднее мы увидим, что единичная матрица Е и нулевая О играют в матричном исчислении такую же роль, как числа 1 и 0 в операциях над числами.

§ 2. Действия над матрицами

Две матрицы А и В называются равными (А = В), если они имеют одинаковые размерности (то есть одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны.

Так, если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

то А = В, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

<u>Сложение матриц</u>

Суммой двух матриц А и В одной и той же размерности $m \times n$ называется матрица С той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В.

Так, если

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \text{ и } \text{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \text{то } \text{C} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{21}+b_{21} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 21 & -16 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 2 & 13 \\ 3 & -5 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 24 & -21 & -14 \end{pmatrix}.$$

Из определения операции сложения матриц вытекают следующие свойства:

1) A+B = B+A;
2) A+ (B+C) = (A+B) +C;
3) A+O = O+A = A (размерность нулевой матрицы должна совпадать с размерностью матрицы A).

<u>Умножение матрицы на число</u>

Произведением матрицы A на число λ называется новая матрица B = λ·A той же размерности, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

По определению полагаем, что $\lambda A = A\lambda$.

<u>Пример.</u>

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 & 16 \\ -5 & 1 & 10 \\ 7 & 11 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & -21 & 112 \\ -35 & 7 & 70 \\ 79 & 77 & 147 \end{pmatrix}.$$

Из определения произведения матрицы на число вытекают следующие свойства (α, β – числа; A, B – матрицы):

1) 1·A = A;
2) 0·A = 0;
3) $\alpha\cdot(\beta A) = (\alpha\beta)\cdot A$;
4) $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$;
5) $\alpha\cdot(A+B) = \alpha A+\alpha B$;

Замечание: разность двух матриц одинаковой размерности можно определить, используя операции сложения и умножения матрицы на число А+ (–1)·В = А–В.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, а λ – некоторое число.

Тогда

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Две матрицы можно умножить друг на друга только тогда, когда число столбцов матрицы, стоящей первым сомножителем, равно числу строк матрицы, стоящей вторым сомножителем. Таким образом, матрицу размерности $m \times n$ можно умножить на матрицу размерности только $n \times k$.

Пусть даны две матрицы А ($m \times n$) и В ($n \times k$). Под *произведением* АВ принимается по определению матрица С ($m \times k$), элементы c_{ij} которой определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} \ ,$$

$$i = 1, 2, \ldots , m; \ \ j = 1, 2, \ldots , k.$$

Как видим, элемент i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения равен сумме произведений элементов i-й строки первого сомножителя на соответствующие элементы j-го столбца второго сомножителя. Матрица-произведение имеет столько строк, сколько их у первого множителя, и столько столбцов, сколько их у второго множителя.

Примеры.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Произведение AB не имеет смысла, в то же время произведение BA можно найти:

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 3 & 0\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3 & 1\cdot 2 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для данных матриц возможны оба произведения:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 3 & 2\cdot 2 - 1\cdot 1 & 2\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы AB и BA не только не равны, но даже имеют разные размерности.

Перестановочный (коммутативный) закон при умножении матриц не выполняется, т. е. $AB \neq BA$.

В отдельных случаях умножение может быть коммутативно, тогда матрицы называются *перестановочными*.

Особую роль при умножении матриц играет единичная матрица E, она выполняет роль подобно числу 1 при умножении чисел. Легко проверить, что при умножении квадратной матрицы A на E, матрица A не изменится, и что только матрица E обладает этим свойством (единица одна!), причем AE=EA=A. Таким образом, единичная матрица E перестановочна с любой квадратной матрицей той же размерности.

Произведение чисел может равняться 0 только в том случае, когда хотя бы одно из них равно 0, однако произведение матриц не наследует это свойство. Более того, возможно, что $A\cdot A=0$, хотя A не совпадает с O-матрицей.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Или еще пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \ AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Легко проверить, что операция умножения матриц имеет следующие свойства (A,B,C – матрицы, α – число.):

1) (AB)C = A(BC) – ассоциативный закон умножения матриц;
2) α(AB) = (αA)B;
3) (A+B) = AC+BC – дистрибутивный закон умножения матриц по отношению к сложению;
4) C(A+B) = CA+CB.

С введением операции умножения матриц появилась возможность рассматривать возведение квадратной матрицы в степень.

<u>Возведение матрицы в степень</u>

Пусть дана квадратная матрица A. Если n – натуральное число, то под A^n понимают произведение одинаковых сомножителей, каждый из которых равен A, т. е.

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}.$$

<u>Примеры.</u>

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$, тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 42 \\ 98 & 121 \end{pmatrix}$.

2. Найдем A^3 и A^4, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E; \ A^3 = AA = EA = A.$$

Далее $A^4 = A^2 \cdot A^2 = EE = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вообще, для данной матрицы

$$A^n = \begin{cases} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если } n - \text{четно} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A, \text{если } n - \text{нечетно.} \end{cases}$$

Для степеней матрицы с натуральными показателями справедливы обычные правила:

1) полагают $A^0=E$;

2) $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$;

3) $(A^n)^m = A^{nm}$.

Транспонирование матриц

Пусть дана матрица A размерности $m \times n$. Поменяем в ней местами строки и столбцы: на место первой строки поставим первый столбец, на место второй строки поставим второй столбец и т. д. Обозначим эту новую матрицу A^T.

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A, она имеет размерность $n \times m$.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ -2 & 1 & 11 & 2\\ 5 & -7 & -8 & 0\end{pmatrix}, \text{то} \qquad A^{T}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -7\\ -3 & 11 & -8\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Если A – вектор-строка $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, то $A^{T}=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ – вектор-столбец.

Для элементов транспонированной матрицы имеем $a_{ij}^{T}=a_{ji}$, $i=1,2,\ \dots,\ n$; $j=1,2,\ \dots,\ m$.

Если A – квадратная матрица, то A^{T} – квадратная матрица того же порядка. Если квадратная матрица не изменилась после транспонирования, т. е. $A^{T}=A$, то A называется *симметрической* матрицей.

Например, матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

является симметрической. У каждой такой матрицы элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Размерности матриц A и A^{T} таковы, что произведения $A\cdot A^{T}$ и $A^{T}\cdot A$ определены.

<u>Пример.</u>

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, тогда $A^{T}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\\ 0 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$A\cdot A^{T}=\begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 27\end{pmatrix},\quad A^{T}\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -5 & -4 & -1\\ -5 & 10 & 12 & 3\\ -4 & 12 & 16 & 4\\ -1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

§3. Определители и способы их вычисления

Для квадратной матрицы вводится понятие определителя (детерминанта) матрицы. *Определитель* квадратной матрицы – это число, которое ей сопоставляется и может быть вычислено по ее элементам в соответствии с определенными правилами. Определитель матрицы А обозначается Δ (detA, |A|) или, если нужно выписать элементы матрицы, – прямыми чертами по бокам этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

Определителем матрицы 1-го порядка (т. е. матрицы, состоящей из одного элемента, одного числа) называется само число, составляющее заданную матрицу: $\Delta=|a_{11}|=a_{11}$.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

т. е. из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитается произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

<u>Пример.</u>

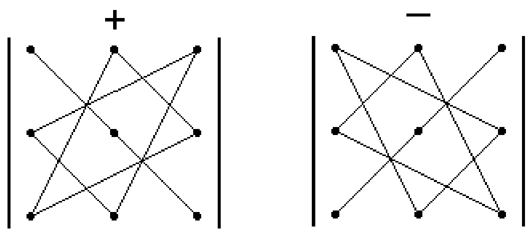
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - (-3)\cdot 4 = 14 + 12 = 26.$$

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице А, называется число, вычисляемое следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства следует брать со знаком “плюс”, а какие со знаком “минус”, полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника*:



Пример.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 3\cdot 5 + 7\cdot 2\cdot 0 - 7\cdot(-2)\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot(-1) = 78.$$

Легко проверяются следующие свойства определителей.

Величина определителя:

- не изменится, если матрицу A транспонировать, т. е. $\det A = \det A^{T}$;
- не изменится, если к элементам какой-либо его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и тоже число;
- меняет знак на противоположный, если поменять местами любые две его строки (или два столбца);
- увеличится в k раз, если элементы какой-либо его строки (или столбца) умножить на k, т. е. общий множитель, имеющийся в строке (или столбце), можно выносить за знак определителя;
- равна нулю, если элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю;
- равна нулю, если элементы каких-либо двух строк (или столбцов) соответственно равны.

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Например, минором элемента a_{12} определителя 3-го порядка является определитель

2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Минор элемента a_{ij} обозначается через M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}. Следовательно, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. Например, $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Это свойство определителя называется *разложением определителя по элементам строки (или столбца)*.

Для определителя 3-го порядка имеют место следующие разложения:

$$\Delta = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13};\ \Delta = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23};\ \Delta = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32};$$
$$\Delta = a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33};\ \Delta = a_{31}A_{31}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}.$$

Свойство разложения определителя по элементам строки (или столбца) допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю. Например, $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} = 0$.

Если A *и* B *– квадратные матрицы одного и того же порядка с определителями* detA *и* detB, *то определитель матрицы* C=AB *равен произведению определителей перемножаемых матриц*, т. е. detC = detA·detB.

В общем случае *определителем n-го порядка*, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

при помощи разложения его по элементам первой строки.

<u>Решение.</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 8 - 2\cdot 39 = -54.$$

Если в определителе все элементы какой-либо строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя выгодно разложить его по элементам именно этой строки (столбца). Если же такой строки (столбца) нет, то, используя свойство 2 определителя, его можно преобразовать так, чтобы он имел такую строку (столбец).

<u>Пример.</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 0 & -7 \\ -4 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot\left(-1\right)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot\left(20+7\right) = -54.$$

Заметим, что определители любого порядка *n* обладают вышеуказанными свойствами.

Для вычисления определителей n-го порядка иногда оказывается полезной формула, позволяющая свести определитель n-го порядка к определителям $(n-1)$-го порядка, элементы которого выражены как миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{2n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{3n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{n1} & a_{nn-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Предполагается, что $a_{11} \neq 0$. Если же $a_{11}=0$, то перестановкой строк и столбцов всегда можно из данного определителя получить такой, в котором $a_{11} \neq 0$.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение.</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 9 & -7 & 12 \\ 12 & -6 & 9 \\ 6 & -10 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-50 - 112\right) = -54.$$

§4. Обратная матрица

Рассмотрим теперь так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Если A – квадратная матрица, то *обратной матрицей* для нее, называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условиям

$$A\cdot A^{-1}=E,\ A^{-1}\cdot A=E,$$

где E – единичная матрица.

Примечание. Из этого определения следует, что если матрица A^{-1} является обратной для A, то и A будет обратной для A^{-1}.

Квадратная матрица называется *невырожденной* (*неособенной*), если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица A называется *вырожденной*.

Для каждой невырожденной матрицы можно найти обратную.

Матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$,

где Δ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} является *обратной* для невырожденной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы построить обратную матрицу для квадратной невырожденной матрицы A, необходимо сначала построить транспонированную матрицу A^T, а затем каждый элемент матрицы A^T заменить его алгебраическим дополнением, деленным на Δ.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$\Delta = -2+10+18+15-3-8=30$. Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица существует.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-5;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=11;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-13;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5.$$

Составляем так называемую *присоединенную* матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов присоединенной матрицы

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 11\\ 5 & -13 & 7\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}.$$

И, наконец, поделив каждый элемент присоединенной матрицы $\tilde{A}$ на величину определителя, получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 11\\ 5 & -13 & 7\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30}\\ \frac{1}{6} & -\frac{13}{30} & \frac{7}{30}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться в правильности вычислений, найдем произведение AA^{-1}, должна получиться единичная матрица.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30}\\ \frac{1}{6} & -\frac{13}{30} & \frac{7}{30}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 1 & 11\\ 5 & -13 & 7\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}30 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 0\\ 0 & 0 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

§5. Матричный способ решения систем линейных уравнений. Правило Крамера

Покажем, каким образом мы можем использовать матричный аппарат для решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а числа b_{ij} – *свободными членами*.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, в противном случае (если хотя бы одно из чисел $b_{ij} \neq 0$) система называется *неоднородной*.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы*, а ее определитель Δ – *определителем системы*.

Решением системы называется совокупность чисел

$$x_1=\lambda_1,\ x_2=\lambda_2,\ \dots,\ x_n=\lambda_n,$$

которые обращают все уравнения системы в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пусть $\det A \neq 0$.

Обозначим матрицу-столбец из неизвестных через X и матрицу-столбец из свободных членов через B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц, имеем:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, данную систему можно записать следующим образом:

$$AX=B.$$

Записанное равенство называется *матричным уравнением* (здесь в роли неизвестного выступает матрица X). Так как по условию $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения матриц, можно написать

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B.$$

Но так как $A^{-1}A=E$ и $EX=X$, то получаем решение матричного уравнения в виде

$$X=A^{-1}B.$$

Замечание. Если при решении матричного уравнения обе части умножить на A^{-1} справа, то решение будет найдено не верно. Домножение справа применяется при решении матричных уравнений вида $XA = B$, где X – неизвестное, A и B – данные матрицы.

<u>Пример.</u> Решить матричным способом систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 6, \\ \ \ x_1 + 5x_2 \qquad = -3. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

В матричной форме эта система запишется в виде $AX=B$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0+10+2+1-15-0=-2 \neq 0,$ значит

существует обратная матрица A^{-1}, которая имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим искомое решение

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Проверка: $\begin{cases} 3\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 1 = 5 \\ 2\cdot 2 - (-1) + 1 = 6 \\ 2 + 5\cdot(-1) = -3 \end{cases}$ – верно.

Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять также с помощью определителей.

Из равенства $X=A^{-1}B$ согласно правилу умножения матриц, имеем:

$$X = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим этот определитель Δ_1.

Аналогично определим

$$\Delta_2 = \mathrm{A}_{12}b_1 + \mathrm{A}_{22}b_2 + ... + \mathrm{A}_{n2}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

....,

$$\Delta_n = \mathrm{A}_{1n}b_1 + \mathrm{A}_{2n}b_2 + ... + \mathrm{A}_{nn}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Каждый определитель Δ_i получается из определителя системы Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Таким образом, матрица-столбец неизвестных принимает вид

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ ... \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix},$$

то есть

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Полученные формулы называются *формулами Крамера,* а правило для нахождения решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера называется соответственно *правилом Крамера*.

Пример. Решить систему уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.
Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Применяя формулы Крамера, получим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Тема 2. *Ранг матрицы. Решение произвольных систем линейных уравнений*

§1. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Пусть в матрице А размерности $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($1 \leq k \leq \max\{m,n\}$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором* k-го порядка матрицы А.

Максимальный порядок r, отличных от нуля миноров матрицы А называется *рангом* матрицы (обозначается rangA). Любой минор порядка r, отличный от нуля, называется *базисным минором*.

Ранг является важной характеристикой матрицы.

Пример. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Рассмотрим минор, получаемый в результате отбрасывания первого столбца данной матрицы (k = 3).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 15 = 5 \neq 0.$$

Так как выбранный минор 3-го порядка отличен от нуля, то rangA=3.

Задача нахождения ранга матрицы непосредственно пользуясь определением требует, как правило, вычисления большого количества определителей. Для удобства нахождения ранга матрицы используют метод элементарных преобразований, основанный на том, что ранг матрицы при этом не меняется.

К *элементарным преобразованиям* относят следующие:

- две строки матрицы можно поменять местами, при этом остальные строки остаются на своих местах;

- все элементы некоторой строки матрицы можно умножить или разделить на некоторое действительное число, отличное от нуля;
- к элементам какой-либо сроки матрицы можно прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое действительное число.

Будем считать, что строки матрицы А линейно зависимы, если хотя бы одна из них линейно выражается через другие. Если строки матрицы линейно зависимы, то в результате элементарных преобразований в матрице появляются строки, состоящие из одних нулей – так называемые *нулевые* строки. Можно показать, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк, т. е. максимальному числу ненулевых строк.

Пример. Вычислить ранг матрицы А, используя метод элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Поменяем местами первую и третью строки, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке полученной матрицы первую строку, умноженную на число 2. Результат запишем на месте второй строки, 1-я и 3-я строки не меняются.

Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично прибавим к третьей строке первую, умноженную на 4, причем первую и вторую строки не меняем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 14 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Прибавив к третьей строке полученной матрицы вторую строку, умноженную на число –2, получим матрицу B, приведенную к ступенчатому виду:

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определить ступенчатую матрицу можно так: если в i-й строке левее элемента a_{ij} стоят только нули, то и ниже этого элемента в j-ом столбце стоят только нули. Метод приведения матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований называют *методом Гаусса*.

Запись A~B (A эквивалентно B) означает, что матрица B получена из матрицы A элементарными преобразованиями. Матрица B остается матрицей того же порядка, что и матрица A. Так как A~B и число ненулевых строк матрицы B равно трем, то rangA = rangB = 3.

Если у ступенчатой матрицы есть нулевые строки, то они находятся внизу.

<u>Пример.</u> $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь ранг матрицы равен 2 по числу получившихся ненулевых строк.

Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Последовательность элементарных преобразований, приводящих матрицу A к ступенчатому виду, и сам ступенчатый вид B определены, вообще говоря, неоднозначно. Однако число ненулевых строк не зависит от способа приведения исходной матрицы к ступенчатому виду.

§2. Решение произвольных систем

Пусть дана система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Заметим сразу, что число уравнений *m*, вообще говоря, не обязательно совпадает с числом неизвестных *n*.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из коэффициентов при неизвестных в системе (1), называется *матрицей системы*.

Вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – это *вектор-столбец неизвестных* данной системы.

Вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – *свободный вектор*.

Матрица

$$\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Ответ на вопрос о совместности системы (1) дает следующая важная **теорема Кронекера-Капелли**: *для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы этой системы*, т. е. $\mathrm{rangA} = \mathrm{rang}\,\overline{\mathrm{A}}$.

Таким образом, если $\mathrm{rangA} \neq \mathrm{rang}\,\overline{\mathrm{A}}$, то система несовместна и вопрос о ее решении не имеет смысла.

<u>Пример.</u> Исследовать совместность системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Имеем $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$.

Приведем расширенную матрицу $\overline{\mathrm{A}}$ методом Гаусса к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы   равен 3. Заметим, что и нерасширенная матрица (до вертикальной черты) одновременно тоже приведена к ступенчатому виду, но ее ранг равен 2.

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ \qquad 5x_2 - x_3 - 16x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1. \end{cases}$$

Видно, что не существует таких чисел x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы последнее уравнение выполнялось, а значит система несовместна.

Пусть теперь $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$, т. е. система имеет хотя бы одно решение. В этом случае число r $(1 \le r \le \min\{m,n\})$, равное рангу матриц A и $\overline{A}$, называется рангом совместной системы (1). Без ограничения общности можно считать, что первые r строк матрицы A ненулевые. Тогда первые r строк расширенной матрицы B также будут линейно независимы. Это, в свою очередь, означает, что первые r уравнений системы (1) независимы, а остальные $m-r$ уравнений являются следствиями первых r уравнений, то есть для решения системы достаточно решить систему из первых r уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение этой системы автоматически будет удовлетворять и остальным $m-r$ уравнениям. Возможны два случая: $r = n$ и $r < n$.

Если $r = n$, то определитель матрицы системы (2)

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Следовательно, по правилу Крамера система имеет единственное решение.

При $r < n$ возьмем первые r уравнений системы (1) и перенесем в каждом из уравнений системы (2) в правую часть все члены с неизвестными $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ (назовем их *свободными* или *неосновными*) и выберем для этих неизвестных некоторые значения $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$. В результате получим систему r уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}c_1 - \dots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}c_1 - \dots - a_{2n}c_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}c_1 - \dots - a_{rn}c_n, \end{cases}$$

относительно r неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ (назовем их *базисными* или *основными*). К этой системе применительно правило Крамера, и поэтому она обладает единственным решением.

Так как значения $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ для неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ можно выбирать произвольно, то система (2), а значит и система (1) имеет бесконечное множество различных решений.

Окончательно вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ x_2(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

определяет *общее решение* системы (1).

Придавая $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ конкретные числовые значения, получим *частное решение* системы (1).

Пример. Исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 11x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -11 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -11 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 23 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 32 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -55 & -7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 32 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -11 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 11x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Так как уравнений три, а неизвестных четыре, то выберем в качестве основных переменных, например, x_1, x_2, x_3, в качестве неосновной – переменную x_4. Полагая $x_4=c$, выразим основные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = -9 - 2c, \\ x_2 = -14 - 4c, \\ x_3 = -3 - c. \end{cases}$$

Окончательно $x_1 = -9 - 2c,\ x_2 = -14 - 4c,\ x_3 = -3 - c,\ x_4 = c$ – общее решение системы, где $c \in (-\infty, +\infty)$.

Укажем некоторые частные решения:
пусть $c = 0$, тогда $x_1 = -9,\ x_2 = -14,\ x_3 = -3,\ x_4 = 0$;
пусть $c = -4$, тогда $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -4$.

§3. Однородные системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной системы

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех ее уравнениях равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

в противном случае система называется *неоднородной*.

Однородная система всегда совместна, так как имеет, например, *тривиальное* (нулевое) решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ ...,\ x_n = 0.$$

Для существования *нетривиального* (ненулевого) решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы r = rangA < n (при $m = n$ это условие означает, что detA=0).

Общие решения таких систем можно найти способом, изложенным в §2.

Чтобы получить общее решение неоднородной системы нужно к общему решению соответствующей однородной системы прибавить некоторое частное решение неоднородной.

§4. Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса

Метод Жордана-Гаусса является эффективным методом решения систем линейных уравнений высокого порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

и состоит из прямого и обратного хода.

Прямой ход метода – приведение расширенной матрицы системы (с помощью элементарных преобразований над строками) к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1\,r-1} & a'_{1r} & a'_{1\,r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \ldots & a'_{2\,r-1} & a'_{2r} & a'_{2\,r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{r\,r+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{array}\right).$$

Если хотя бы одно из чисел b'_{r+1}, …, b'_m отлично от нуля, то система несовместна. Если же b'_{r+1}= …=b'_m= 0, то система совместна, причем если r=n, то система имеет единственное решение $x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2, \ldots,\ x_n = b'_n$; если r<n, то система имеет бесконечно множество решений. Дальнейшее решение осуществляется с помощью обратного хода.

Обратный ход метода Жордана-Гаусса – приведение ступенчатой матрицы (с помощью элементарных преобразований над строками) к виду

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a''_{1\,r+1} & \ldots & a''_{1n} & & b''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a''_{2\,r+1} & \ldots & a''_{2n} & & b''_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a''_{r\,r+1} & \ldots & a''_{rn} & & b''_r \end{array}\right)$$

(здесь нулевые строки отброшены).

Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + a''_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ x_2 + a''_{2\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a''_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a''_{rn}x_n = b''_r. \end{cases}$$

Отсюда, приняв переменные x_1, x_2, …, x_r за базисные и, придавая неосновным переменным x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n значения c_1, c_2, …, c_{n-r} , получим общее решение

$$\begin{cases} x_1 = b_1'' - a_{1\,r+1}'' c_1 - \ldots - a_{1n}'' c_{n-r}, \\ x_2 = b_2'' - a_{2\,r+1}'' c_1 - \ldots - a_{2n}'' c_{n-r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r'' - a_{r\,r+1}'' c_1 - \ldots - a_{rn}'' c_{n-r}, \\ x_{r+1} = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = c_{n-r}. \end{cases}$$

Придавая произвольным постоянным c_1, c_2, …, c_{n-r} конкретные числовые значения можно получить частные решения системы.

<u>Примеры.</u> Методом Жордана-Гаусса найти общее решение системы.

$$1.\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 14x_5 = 3, \\ x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 29x_4 + 17x_5 = 2. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 13 & 9 & 29 & 17 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 22 & 8 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Данная система несовместна.

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Считая x_1, x_2 базисными неизвестными, а x_3, x_4 – свободными ($x_3=c_1$, $x_4=c_2$), получаем общее решение в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 = 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2, \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{pmatrix}$$

Придавая c_1, c_2 определенные числовые значения можно найти частное решение системы.

Например:

при $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$;

при $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, получаем $x_1 = 0{,}6$, $x_2 = 2{,}8$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

УПРАЖНЕНИЯ К ТЕМЕ 1

<u>Задание 1.</u> Найти матрицу С.

1.1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\cdot C = 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 \\ -7 & -8 & -15 \\ -7 & 1 & 34 \end{pmatrix} + 3\cdot C = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 7 & 20 & -7 \\ 21 & 17 & 6 \end{pmatrix} - 3\cdot C = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 9 \\ -4 & 11 & 4 \\ 21 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\cdot C = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -7 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

1.5. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \cdot C = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

1.6. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 15 \end{pmatrix}$.

1.7. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 12 \\ 12 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

1.8.
$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 9 \\ -4 & 11 & 4 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.9. $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -2 & -10 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.10. $$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \mathrm{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.11. $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \mathrm{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12. $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathrm{C} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.13. $$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -5 \\ -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.14. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 \\ -7 & -8 & -15 \\ -7 & 1 & 34 \end{pmatrix} + 3 \cdot \mathrm{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.15. $$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 7 & 20 & -7 \\ 21 & 17 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \mathrm{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.16.
$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 9 \\ -4 & 11 & 4 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -7 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.17. $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot 3 - C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.18. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 13 \\ -4 & 26 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.19. $$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 1 & 13 & 11 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.20. $$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.21. $$\begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ 4 & -5 & 4 \\ 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} - 4 \cdot C = \begin{pmatrix} -7 & 7 & -7 \\ 4 & -9 & 4 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.22. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 \\ -7 & -8 & -15 \\ -7 & 1 & 34 \end{pmatrix} - 2 \cdot C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -7 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.23 $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.24. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 15 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathrm{C} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

1.25. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 11 \\ 7 & 8 & 15 \\ 7 & -1 & -34 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathrm{C} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$

<u>Задание 2.</u> Найти значение матричной функции $f(\mathrm{A})$.

2.1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3. $f(x) = -2x^2 + x + 1$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. $f(x) = x^2 - 7x + 6$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5. $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6. $f(x) = -4x^2 - x + 13$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.7. $f(x) = x^2 - 6x - 9$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.8. $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.9. $f(x) = 2x^2 - x - 3$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.10. $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.11. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.12. $f(x) = -x^2 - 2x + 9$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.14. $f(x) = 4x^2 - x - 3$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.15. $f(x) = 4x^2 + 6x - 13$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.16. $f(x) = x^2 + x - 8$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.17. $f(x) = -2x^2 - x - 1$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.18. $f(x) = 7x^2 - x + 1$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.19. $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.20. $f(x) = 2x^2 - 7x - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.21. $f(x) = x^2 - 6x - 2$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.22. $f(x) = 4x^2 - x - 13$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.23. $f(x) = x^2 + 7x + 3$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.24. $f(x) = x^2 - 15x + 6$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2.25. $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Задание 3.</u> Решить матричные уравнения и проверить правильность решения подстановкой:

3.1. a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -3 \\ 5 & 26 & -4 \\ -2 & -14 & 2 \end{pmatrix}$;

3.2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 39 & -16 \\ -6 & 34 & -26 \end{pmatrix}$;

3.3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 7 & -3 & -25 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$;

3.4. a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -15 & -1 & -5 \\ -22 & 1 & -9 \end{pmatrix}$;

3.5. a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 25 \\ 18 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

3.6. a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 32 \\ 17 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

3.7. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

3.8. a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, b)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -15 & -1 & -5 \\ -22 & 1 & -9 \end{pmatrix};$$

3.9. a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3.10. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 39 & -16 \\ -6 & 34 & -26 \end{pmatrix}$;

3.11. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 25 \\ 29 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3.12. a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

3.13. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3.14. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

3.15. a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

3.16. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 2 \\ 5 & 26 & -4 \\ 1 & 20 & -3 \end{pmatrix}$;

3.17. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 39 & -16 \\ -6 & 34 & -26 \end{pmatrix}$;

3.18. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 7 & -3 & -25 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$;

3.19. a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -15 & -1 & -5 \\ -22 & 1 & -9 \end{pmatrix}$;

3.20. a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

3.21. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

3.22. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 \\ 29 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 39 & -16 \\ -6 & 34 & -26 \end{pmatrix}$;

3.23. a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$, b)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -15 & -1 & -5 \\ -22 & 1 & -9 \end{pmatrix};$$

3.24. a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix};$

3.25. a) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 45 \\ 38 \end{pmatrix}$, b) $X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

<u>Задание 4.</u> Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

4.1. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 5y + 6z = 32, \\ 2x + y + 7z = 25. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 16, \\ 4x + 3y + 2z = 26, \\ 3x + 5y + 2z = 27. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x + 4y + 2z = 33, \\ 3x + 7y + 5z = 68, \\ 6x + 2y + z = 55. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} x + 4y + 2z = 24, \\ 3x + 7y + 5z = 49, \\ 6x + 2y + z = 23. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x + y + 7z = 27, \\ 4x + 5y + 6z = 42, \\ 3x + 2y + z = 14. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 11, \\ 6x + 5y + 2z = 23, \\ 3x + 4y + 5z = 25. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 19, \\ 4x + 3y + 2z = 23, \\ 3x + 5y + 2z = 32. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 2x + y + 7z = 16, \\ 4x + 5y + 6z = 39, \\ 3x + 2y + z = 17. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x+4y+5z=25, \\ x+3y+2z=11, \\ 2x+2y+3z=15. \end{cases}$ 4.18. $\begin{cases} x+4y+2z=25, \\ 3x+7y+5z=48, \\ 6x+2y+z=18. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} x+4y+4z=24, \\ 5x+2y+2z=30, \\ 3x+2y+3z=24. \end{cases}$ 4.19. $\begin{cases} 2x+y+7z=27, \\ 4x+5y+6z=42, \\ 3x+2y+z=14. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 2x+y+z=9, \\ 2x-4y+z=-11, \\ 7x+2y-2z=24. \end{cases}$ 4.20. $\begin{cases} 3x+2y+z=10, \\ 4x+5y+6z=32, \\ 2x+y+7z=25. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x+y+2z=29, \\ 4x+5y+6z=63, \\ 3x+2y+z=28. \end{cases}$ 4.21. $\begin{cases} x+7y+8z=3, \\ x-y-z=1, \\ 5x-2y+2z=13. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x+2y+4z=7, \\ 5x+y+2z=8, \\ 3x+2y+3z=8. \end{cases}$ 4.22. $\begin{cases} 2x+3y+z=16, \\ 4x+3y+2z=26, \\ 3x+5y+2z=27. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x+3y+z=24, \\ 5x+3y+5z=13, \\ 3x+2y+2z=14. \end{cases}$ 4.23. $\begin{cases} 2x-y+6z=24, \\ 4x+4y-7z=3, \\ x+2y+z=16. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 3x+7y+2z=31, \\ 5x+3y+z=32, \\ 4x+2y+2z=26. \end{cases}$ 4.24. $\begin{cases} -x-y+z=-1, \\ 3x-5y-2z=15, \\ 7x+8y+3z=26 \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 5x+y+3z=20, \\ 4x+2y+z=17, \\ 3x+5y+2z=21. \end{cases}$ 4.25. $\begin{cases} 5x+3y+z=24, \\ 4x+2y+5z=13, \\ 3x+2y+2z=14. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x+7y+\ \ z=10, \\ 4x+5y+2z=11, \\ 3x+7y+4z=14. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ К ТЕМЕ 2

Задание 5. Исследуйте и найдите решение следующих систем линейных уравнений:

5.1. a) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3-7x_4=2, \\ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=1, \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1, \\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3+\ \ x_4=3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+3x_2+\ \ x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3+3x_4=0, \\ x_1-5x_2+3x_3-4x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ \qquad x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=-3, \\ x_1+3x_2-\qquad 3x_4=1, \\ \quad -7x_2+3x_3+\ \ x_4=-3. \end{cases}$

5.2. a) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1, \\ \qquad x_2-\qquad 5x_4=3, \\ x_1-3x_2+4x_3+3x_4=4, \\ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4=0, \\ x_1+3x_2+4x_3-5x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-\ \ x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-3x_3+5x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

5.3. a) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

5.4. a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

c) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_3 - 14x_4 = -6. \end{cases}$$

5.5. a) $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_2 - 15x_3 + 18x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 1, \\ 7x_1 + 10x_2 - x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

5.6. a) $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + 6x_4 = -2. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

5.7. a) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-2x_4-3x_5=8, \\ x_1-3x_2-5x_3+3x_4+x_5=-6, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4-2x_5=4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+3x_3-5x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+11x_3+x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ 4x_1-11x_3-3x_4=-3. \end{cases}$

5.8. a) $\begin{cases} 2x_2+4x_3-3x_4=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ 6x_1+5x_2+13x_3=8 \\ 2x_1+3x_2+7x_3-2x_4=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+4x_4=2, \\ -4x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+5x_2+2x_3+x_4=1, \\ 6x_1+2x_2-14x_4=-6. \end{cases}$

5.9. a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 = 7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

5.10. a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_2 + 18x_3 - 15x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$

5.11. a) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + 6x_3 - 14x_4 = -6. \end{cases}$

5.12. a) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_1 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

5.13. a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 4x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 + 7x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

5.14. a) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_2 - 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

5.15. a) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 7x_4 - 7x_5 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 14. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

5.16. a) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - 1x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

5.17. a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 4x_5 = -1, \\ 2x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 19x_3 - 12x_4 = 0, \\ -4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

5.18. a) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$

5.19. a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+4x_3-5x_4=0, \\ 3x_1+12x_2+19x_3-8x_4=0, \\ -4x_1+x_2+3x_3+5x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+4x_4=2, \\ x_1+x_2-4x_3+11x_4=5, \\ 5x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+6x_3-14x_4=-6. \end{cases}$

5.20. a) $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3+7x_4+9x_5=1, \\ x_1+7x_2+8x_3+18x_4+13x_5=0, \\ x_1+9x_2+13x_3+29x_4 17x_5=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-5x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-3x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 12x_1+19x_2-3x_3+8x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1, \\ 3x_2-15x_3+18x_4=6, \\ 3x_1+5x_2-4x_3+6x_4=1, \\ 7x_1+10x_2-1x_3+4x_4=-1. \end{cases}$

5.21. a) $\begin{cases} x_1+5x_2+5x_3=0, \\ x_1-4x_2+x_3-2x_4=2, \\ 4x_1+2x_2+12x_3-4x_4=5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+5x_3+8x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=1, \\ 3x_1+4x_2-3x_3-x_4=1. \end{cases}$

5.22. a) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ x_1-4x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+11x_3+x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ 4x_1-11x_3-3x_4=-3. \end{cases}$

5.23. a) $\begin{cases} x_1+x_3-2x_4=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1, \\ 4x_2-3x_3-10x_4=1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+3x_2-5x_3+4x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3+4x_4=2, \\ -4x_1+x_2+x_3+11x_4=5, \\ x_1+5x_2+2x_3+x_4=1, \\ 6x_1+2x_2-14x_4=-6. \end{cases}$

5.24. a) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-2x_4=-1, \\ x_1-3x_2+4x_3+3x_4=4, \\ x_1+3x_2-2x_3-7x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4=1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 12x_1-3x_2+8x_3+19x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4=1, \\ 3x_1+4x_2+5x_3-2x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-3_4=1. \end{cases}$

5.25. a) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4-x_5=6, \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4-7x_5=8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-4x_2-5x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ 12x_1+3x_2+8x_3+19x_4=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_2+18x_3-15x_4=6, \\ x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=-2, \\ x_1-8x_3+7x_4=-3. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.-М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М.: Наука, 1980.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.- М.: Наука, 1966.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.- М.: Высшая школа, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ